Title	二次元石けん泡の統計的「形」の問題(基研短期研究計画「形の物理学」,研究会報告)
Author(s)	種村, 正美
Citation	物性研究 (1981), 36(1): A64-A67
Issue Date	1981-04-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/90229
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

パターンを理解する際の基礎になるであろう。

参 考 文 献

1) Hasegawa, M. & Tanemura, M. (1976) Ann. Inst. Statist. Math. **28B**, 509–519.
2) 長谷川政美，種村正美（1977）応用統計学 **5**, 47–61.
3) Hasegawa, M. & Tanemura, M. (1978) Proc. Internatl. Symp. on Mathematical Topics in Biology, Kyoto. pp. 39–48.
4) Tanemura, M. & Hasegawa, M. (1980) J. Theoret. Biol. **82**, 477–496.
5) Meijering, J. L. (1953) Philips Res. Rep. **8**, 270–290.
6) Newell, P. C. (1977) Endeavour, New Series, **1**, 63–68.
7) Thompson, D'Arcy W. (1959) *On Growth and Form,* Cambridge Univ. Press, pp. 500–503.
8) Honda, H. (1978) J. Theoret. Biol. **72**, 523–543.
9) 松岡春樹，伊藤文雄（1979）福井大学積雪研究室研究報告第４号，pp. 9－31.
10) Hamilton, W. D. (1971) J. Theoret. Biol. **31**, 295–311.
11) Fischer, R. A. & Miles, R. E. (1973) Math. Biosci. **18**, 335–350.
12) Finney, J. L. (1978) J. Mol. Biol. **119**, 415–441.
13) Tanemura, M., Hiwatari, Y., Matsuda, H., Ogawa, T., Ogita, N. & Ueda, A. (1977) Prog. Theoret. Phys. **58**, 1079–1095.
14) Plattner, S. (1975) Sci. Am. **232** (No. 5), 66–79.
15) Barlow, G. W. (1974) Anim. Behav. **22**, 876–878.

二次元石けん泡の統計的「形」の問題

統計数理研究所　種 村 正 美

§1. 序

石けんの泡の問題というと，すぐに，石けん膜に関する有名なPlateauの問題[1]や，あるいは二次元の泡を用いたBragg-Nyeの結晶格子模型[2]を連想されるむきが多いかもしれない。し

かし，ここでの目的は（もちろん，これらの問題と無関係ではないが），石けんの泡による平面の多角形分割という現象に関して，多角形泡の「形」の統計分布をみちびくモデル[3),4)]を御紹介することである。

§2. 石けんの多角形泡の「平衡状態」

Bragg-Nye の実験においては，石けん液中に細い管を通して空気を送り込み，球状の泡をできるだけ一様な大きさで，自由表面上に発生させることが，良い結晶模型を構成する上で重要であった。これに対し，Smith[5)]等は，狭い間隔で平行に固定した２枚のガラス板の間に，石けん泡を注入することによって多角形の泡をつくり，これの動的および静的形態について，金属結晶粒界の二次元模型として考察した。

いま，この２枚の平行板に注入されたばかりの泡に注目しよう。石けんは，ふつう，長脂肪酸のナトリウム塩であって，泡はこの塩の単分子膜，またはそれがいく重かに層状になった膜で構成される[6)]。そのため，２つの泡の間には，泡膜を通して気体分子の拡散が起る。気体分子の流れは，泡膜に両側から働く圧力の差に比例する。２つの泡の内圧をそれぞれ p_1，p_2 とし，注目する１つの膜の曲率半径を符号を含めて R とすると，圧力差は Laplace の式 $\Delta p = p_1 - p_2 = 2\gamma/R$ で表わされる[7)]。ここで γ は膜の表面張力である。したがって，曲率半径の小さい泡ほど内圧が相対的に大きく，小さい泡の中の気体は大きい泡の中に拡散していく。その結果，小さい泡はやがて消滅し，大きな泡はますます大きくなっていく。この変化の際，一つの頂点に４つ以上の膜が集まる状態は不安定であるので，一つの頂点にちょうど３つの膜が集まるように，泡がすばやく再配列する。そして，頂点では，各膜が力学的安定性を保つために，互いに120°の角をなす。

このような一連の過程をへて泡の配置が変化していくが，やがて系は，一種の「平衡状態」に落ち着き，その状態においては気体の拡散が，泡の再配列のすばやさに比べて無視できる程度になる。そして気体の拡散の果す役割は，系を平衡状態の一つの配置から他の配置に移すこととなる。そこで，石けんの泡というマクロな対象の系の平衡状態に，本来ミクロな対象に使われる統計力学の手法を適用することにする。

§3. 格子模型にもとずく多角形分布

泡の多角形がつくるグラフは一つの空間分割グラフである。いま，泡の１つ１つに１点を対応させ，隣接する泡を互いに線分で結ぶと，もとのグラフの双対グラフができ上がる。もとのグラフでは，上述のように，１つの頂点に３辺が集まるので，双対グラフでは３角形が基本図

形となる。そこで，問題を簡単化するため，泡の双対グラフが3角形分割グラフになることから，正三角格子空間を考える。そして，格子点が1つの泡を表わすと考える。このようにすれば，配置のエントロピーが求められ，自由エネルギーを計算できるようになる。

ここで，さらに次の仮定をおく。

(i) 双対三角格子の各格子点は第1近接格子点または第2近接格子点のいずれかに結ばれ，これらのボンドは互いに交わることはないものとする。[3), 4)]

(ii) 第1近接ボンドに対応する泡の膜は表面エネルギー ε をもち，第2近接ボンドに対応する膜は，εa の表面エネルギーをもつとする（ε，$a>0$）。[4)]

これらの仮定の下で，n 角形の泡の現われる確率 P_n を求めるのである（詳しくは文献3，4を参照のこと）。

計算には格子統計の近似的手法の1つであるKikuchi近似を用いるが，そのための基本クラスターとして，ここでは，最近接格子点対および基本三角形をとる。第1近接ボンドの出現確率を w（したがって第2接近ボンドのそれは $1-w$ となる）としたとき，これらの基本クラスター上の種々の配置の出現確率はすべて w で表わすことができる。泡の形を，2種のボンドの配置から求めるために，1つの格子点をかこむ6つの最近接格子点がつくる六角形の上での配置を考える。この配置には30通りの異なった配置があり，それぞれ適当な縮退度をもっている。w を与えたときの，この六角形上のおのおのの配置に関する出現確率を求めると，辺数 n に関する確率分布 P_n がえられる。

次に系の自由エネルギーを求める。Helmholtzの自由エネルギー F を $F=E-RS$ で表わす。E は内部エネルギー，S はボンドの配置のエントロピー，そして R はエネルギーの次元をもった，温度に対応する正定数である。いま，エネルギーの単位として仮定(i)で導入した ε にとり，$\varepsilon/R\to\varepsilon$ とおきかえ，さらに泡の総数（格子点の総数）を M（$\gg 1$）として，1つの泡あたりの自由エネルギー

$$F/MR=E/MR-S/M$$

の形に書きかえる。エントロピー S/M は基本クラスター上の配置が三角格子空間上に矛盾なく出現するときの組み合わせ数から求められる。内部エネルギー E/MR は P_n および仮定(ii)に与えた表面エネルギーから求められ，w，ε，a で表わされる。このようにして得た自由エネルギー F/MR を w に関して最小にするという，平衡状態の条件から，w と $A=\varepsilon(a-1)$ の間の関係式がえられる。

A を与えたときの，最も確からしい n 角形の出現確率 P_n を図1に示した。実験結果は I で示してある。これによると $A=0.7$ の場合が比較的，実験との一致がよい。文献3のモデルの

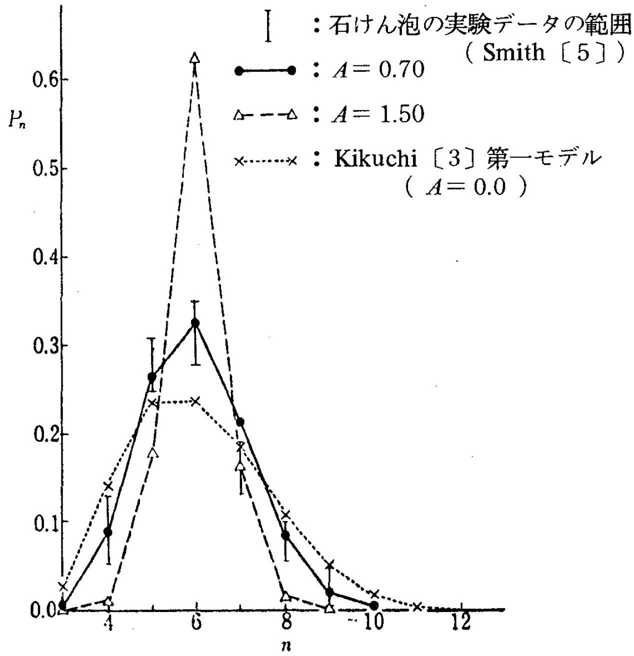

図1

結果は$A=0$の場合に対応する。このようにして，表面エネルギーの効果を取り入れることによってモデルが改良された。

このようなモデルは，結晶粒界や，生物の細胞（たとえば眼の角膜内皮細胞）の形の分布にも適用できると考えられる。

参 考 文 献

1) J. Plateau, "*Statique Experimentale et Theorique des Liquides Soumis aux Seules Forces Moleculaires*" (Ghent, 1873).

2) L. Bragg and J. F. Nye, Proc. Roy. Soc. London, **190** (1947), 474.

3) R. Kikuchi, J. Chem. Phys., **24** (1956), 861.

4) 種村，統計数理研究所彙報　26 (1979)，107.

5) C. S. Smith, "*Metal Interfaces*", (American Society for Metals, Cleveland, 1952), pp. 65–113.

6) 立花太郎，「しゃぼん玉 ── その黒い膜の秘密」（中公自然選書，1975）

7) 例えば L. D. Landau and E. M. Lifshitz, "*Statistical Physics*" (Pergamon, 1958), Chap. 15.